NUMERI COMPLESSI

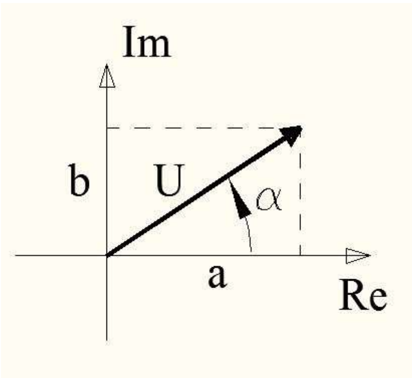
Con l'espressione numero complesso è inteso la somma di un numero reale e di un numero immaginario (cioè un multiplo reale dell'unità immaginaria, indicata con la lettera j). I numeri complessi sono usati in tutti i campi della matematica, in molti campi della fisica (e notoriamente in meccanica quantistica), e in ingegneria, specialmente in elettronica/telecomunicazioni o elettrotecnica, per la loro utilità nel rappresentare onde elettromagnetiche e correnti elettriche ad andamento temporale sinusoidale.

In matematica, i numeri complessi formano un campo e sono generalmente visualizzati come punti del piano, detto piano complesso. La proprietà più importante che caratterizza i numeri complessi è il teorema fondamentale dell'algebra, che asserisce che qualunque equazione polinomiale di grado n ha esattamente n soluzioni complesse, non necessariamente distinte.

$$\dot{U} = a + jb$$

a = parte reale b = parte immaginaria $j = \sqrt{-1}$ coefficiente immaginario

Un numero complesso può essere rappresentato sul piano di Gauss come un vettore.
In matematica, il piano complesso (chiamato anche piano di Gauss) è un modo per visualizzare lo spazio dei numeri complessi. Può essere pensato come un piano cartesiano modificato, con la parte reale rappresentata sull'asse x e la parte immaginaria rappresentata sull'asse y. L'asse x è chiamato anche l'asse reale e l'asse y asse immaginario.




**U** è il modulo del vettore
**a** la sua proiezione sull'asse reale
**b** la sua proiezione sull'asse immaginario
**α** la fase del vettore

Se conosco i valori di **a** e **b** posso ottenere **U** e **α** e viceversa

Modulo di $\dot{U}$ $|\dot{U}| = U = \sqrt{a^2 + b^2}$ fase di $\dot{U}$ $\angle \dot{U} = \alpha = arctg\frac{b}{a}$

Se conosco i valori di **U** e **α** posso ottenere **a** e **b** $a = U\cos\alpha$ $b = U\sin\alpha$

Nota che $j = \frac{jj}{j} = -\frac{1}{j}$ poiché $jj = j^2 = -1$

## Notazione esponenziale

Lo stesso numero complesso e il corrispondente vettore possono essere rappresentati con notazione esponenziale

$$\dot{U} = a + jb = U(\cos\alpha + j\sin\alpha) = Ue^{j\alpha}$$

La notazione è comprensibile conoscendo le FORMULE DI EULERO

$e^{j\alpha} = (\cos\alpha + j\sin\alpha)$ $\qquad$ $e^{-j\alpha} = (\cos\alpha - j\sin\alpha)$

$cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$

OPERAZIONI tra NUMERI COMPLESSI

**Uguaglianza** tra due numeri complessi $a + jb = c + jd$ equivale a due equazioni una per la parte reale e una per la parte immaginaria $a = c$ $\quad b = d$

La **Somma** di due numeri complessi ha parte reale uguale alla somma delle parti reali e parte complessa uguale alla somma delle parti complesse

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

La **Differenza** tra due numeri complessi ha parte reale uguale alla differenza delle parti reali e parte complessa uguale alla differenza delle parti complesse

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

**Rapporto** tra due numeri complessi si può fare razionalizzando

$$\frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)}\frac{(c - jd)}{(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Rapporto tra due numeri complessi si può fare n forma esponenziale

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ve^{j\beta}} = \frac{U}{V}\, e^{j(\alpha-\beta)}$$

Da cui possiamo dire che
Il modulo del rapporto è uguale al rapporto tra i moduli

$$\frac{U}{V} = \left|\frac{(a + jb)}{(c + jd)}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

La fase del rapporto è uguale alla differenza tra le fasi del numeratore e denominatore

$$\alpha - \beta = \angle\frac{a + jb}{c + jd} = \tan^{-1}\frac{b}{a} - \tan^{-1}\frac{d}{c}$$

**Prodotto** tra due numeri complessi

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

Più immediata in forma esponenziale in forma esponenziale

$$(a + jb)(c + jd) = Ue^{j\alpha}Ve^{j\beta} = UVe^{j(\alpha+\beta)}$$

Quindi possiamo dire che il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli

$$UV = |(a + jb)(c + jd)| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

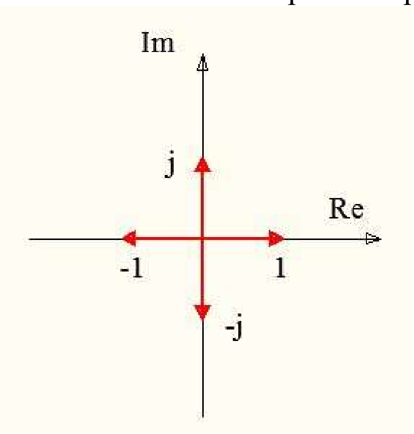
La fase del prodotto è uguale alla somma delle fasi

$$\alpha + \beta = \angle(a + jb)(c + jd) = tan^{-1}\frac{b}{a} + tan^{-1}\frac{d}{c}$$

Valori notevoli per $\tan\alpha$ e $\tan^{-1}x$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $tan\,90° = \infty$ | $tan - 90° = -\infty$ | $tan\,0° = tan\,180° = 0$ | $tan\,45° = 1$ |
| $\tan^{-1}\infty = 90°$ | $\tan^{-1} -\infty = -90°$ | $\tan^{-1} 0 = 0°$ | $\tan^{-1} 1 = 45°$ |

Vediamo un caso semplice sul piano di Gauss




Il vettore di modulo 1 con sola parte reale ( quindi fase 0 ) sarà rappresentato sull'asse reale V = 1
Il vettore di modulo 1 con sola parte immaginaria ( quindi fase 90° ) sarà rappresentato sull'asse immaginario V = j
Notiamo che se moltiplichiamo il vettore unitario sull'asse reale per j otteniamo lo stesso vettore ruotato di 90° in senso antiorario, se moltiplichiamo di nuovo per j otteniamo il vettore V = -1 e moltiplicando ancora per j avremo V = -j
In conclusione moltiplicare per j equivale a ruotare il vettore di 90° in senso antiorario
dividere per j equivale a ruotare il vettore di 90° in senso orario